Лекция 8 «Основы теории подобия и анализ размерностей. Принципы моделирования»

Цель: Приведите определение моделирования. Дайте характеристику видов подобия. Охарактеризуйте инварианты подобия и критерии подобия. Сформулируйте теоремы подобия.

Краткий конспект лекции: Моделирование химико-технологических процессов. Многие химико-технологические процессы настолько сложны, что удается лишь составить систему дифференциальных уравнений для их описания и установить условия однозначности. Решить же эти уравнения известными в математике методами обычно не представляется возможным. В подобных случаях используют *метод моделирования.* В широком смысле *под моделированием понимают исследование объектов познания на их моделях,* поэтому моделирование неотделимо от развития знания.

Моделирование находит широкое применение как при проведении научных исследований, так и при решении большого числа практических задач в различных областях техники: в гидравлике и гидротехнике (определение конструктивных и эксплуатационных характеристик гидротехнических сооружений, моделирование течений рек, волн, приливов и отливов и др.); в авиации, ракетной и космической технике (определение характеристик летательных аппаратов и их двигателей и др.); в судостроении (определение характеристик корпуса судна и др.); в теплотехнике (при конструировании и эксплуатации различных тепловых аппаратов) и т. п.

Огромное значение имеет моделирование при исследовании химико-технологических процессов и проектировании химических производств. При этом *под моделированием понимают метод исследования химико-технологических процессов на моделях, отличающихся от объектов моделирования (натуры) в основном масштабом.* Моделирование можно осуществлять двумя основными методами – *методом обобщенных переменных, или методом теории подобия* (физическое моделирование), и *методом численного эксперимента* (математическое моделирование) [1,2].

Метод обобщенных переменных

При *физическом моделировании* (масштабировании) экспериментально исследуемый объект (модель) отличается от натуры *масштабом, физическая же природа явления (процесса)* остается той же. Изучение процессов с целью получения уравнений, необходимых для их анализа и расчета, можно проводить теоретически. Однако такой путь часто оказывается невозможным. В таких случаях прибегают к проведению опытов, получая эмпирические зависимости. Однако такое осуществление экспериментов, которое позволяет обобщать результаты опытов и распространять их на широкий круг вопросов и явлений, подобных изучаемому, но отличающихся численными значениями параметров наиболее плодотворно. Это достигается при использовании для обработки опытных данных методов теории подобия. Метод обобщенных переменных составляет основу теории подобия [1].

Одним из основных принципов теории подобия является выделение из класса явлений (процессов), описываемых общим законом (процессы движения жидкостей, диффузии, теплопроводности и т.п.), группы *подобных явлений. Подобными называют такие явления, для которых отношения сходственных и характеризующих их величин постоянны.*

Различают следующие виды подобия: а) геометрическое; б) временное; в) физических величин; г) начальных и граничных условий.

Геометрическое подобие предполагает, что сходственные размеры натуры и модели параллельны, а их отношение выражается постоянной величиной.

Предположим, что изучается сложное явление – движение газа во вращающемся цилиндре (рис. 1). Чтобы исследовать процесс в данном аппарате, строим модель, соблюдая геометрическое подобие (рис. 1, *б*), т.е. равенство отношений сходственных линейных размеров натуры и модели.

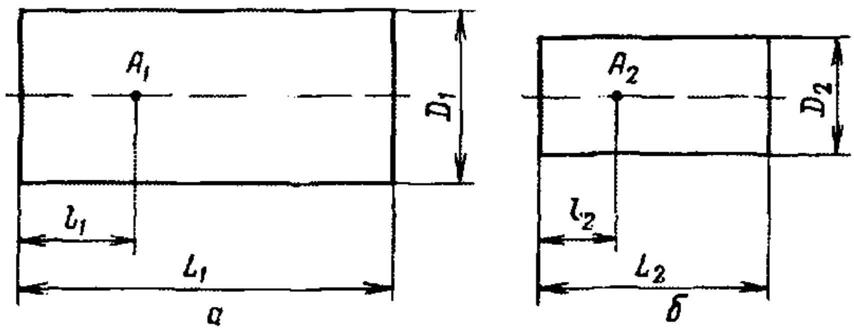

Рис. 1. К определению условий подобия натуры *(а)* и модели *(б)*

Если рассматриваемая система (натура, образец) находится в движении, то при наличии геометрического подобия все ее точки должны перемещаться по подобным траекториям сходственных точек подобной ей системы (модели), т.е. проходить геометрически подобные пути (точки A_1 и A_2). Геометрическое подобие соблюдается при равенстве отношений всех сходственных размеров натуры и модели:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{l_1}{l_2} = \cdots a_l = const. \qquad (1)$$

Безразмерную величину a_l называют *константой геометриического подобия, или масштабным (переходным) множителем.* Константа подобия характеризует отношение однородных сходственных величин в подобных системах (в данном случае - линейных размеров натуры и модели) и позволяет перейти от размеров одной системы (модели) к другой (натуре).

Временное подобие предполагает, что сходственные точки или части геометрически подобных систем (натуры и модели), двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отношение которых является постоянной величиной:

$$T_1/T_2 = \tau_1/\tau_2 = a_\tau, \qquad (2)$$

где T_1 и T_2 – время прохождения сходственными частицами всего аппарата, соответственно натуры и модели; τ_1 и τ_2 – время прохождения сходственными частицами подобных путей l_1 и l_2; a_τ – константа временного подобия.

Подобие физических величин предполагает, что в рассматриваемых подобных системах (натуры и модели) отношение значений физических величин двух любых сходственных точек или частиц, подобно размещенных в пространстве и времени, есть величина постоянная. Например, если в натуре частица за время τ_1 прошла путь L_1 (рис. 1, *а),* а в модели – за время τ_2 путь l_2, то для сходственных точек A_1 и A_2 имеем:

$$\mu_1/\mu_2 = a_\mu\,;\ \rho_1/\rho_2 = a_\rho\,;\text{ или }\ u_1/u_2 = a_u, \tag{3}$$

где u_1 и u_2 – совокупность физических величин (но в общем случае $a_\mu \neq a_\rho \neq a_l \neq a_\tau$ и т.д.).

Подобие физических величин включает подобие не только физических констант, но и *совокупности значений физических величин,* или *полей физических величин.* Таким образом, при соблюдении геометрического и временного подобия будет соблюдаться также подобие полей скоростей, температур, концентраций и других физических величин, т.е. $w_1/w_2 = a_w$, $t_1/t_2 = a_t$; $c_1/c_2 = a_c$ – константы.

Подобие начальных и граничных условий предполагает, что начальное состояние и состояние на границах систем (натуры и модели) подобны, т.е. отношения основных параметров в начале и на границах систем постоянны. Это справедливо лишь в тех случаях, когда для начальных и граничных условий систем выдерживаются геометрическое, временное и физическое подобия, т.е. $L_1/L_2 = a_l$; $\mu_1/\mu_2 = a_\mu$.

Инварианты подобия и критерии подобия

Если все сходственные величины, определяющие состояние данной системы (натуры) и подобной ей системы (модели), измерять в относительных единицах, т.е. брать сходственное отношение величин для каждой системы, то оно также будет величиной постоянной и безразмерной, например:

$$L_1/D_1 = L_2/D_2 = \ldots = \text{inv} = \text{idem} = i_l; \tag{4}$$

$$T_1/\tau_1 = T_2/\tau_2 = \ldots = i_\tau. \tag{5}$$

Величины i_l, i_τ и т.д. *не зависят от соотношения размеров натуры и модели,* т.е. для другой модели, также подобной натуре, значения i_l, i_τ… будут те же. Таким образом, отношения геометрических размеров, времени и физических констант в данной системе (натуре) равны отношениям тех же величин в подобной системе (модели). При переходе от одной системы к другой, ей подобной, численное значение величин i_l, i_τ … сохраняется. Поэтому безразмерные числа i, выражающие отношение двух однородных величин в подобных системах, носят название *инвариантов подобия* (*invariantis* (лат.) – неизменяющийся).

Инварианты подобия, представляющие собой отношения однородных величин, называют *симплексами* (*simplex* (лат.) – простой), или *параметрическими критериями* (например, отношение L_1/D_1 – геометрический симплекс). Инварианты подобия, выраженные отношением *разнородных* величин, называют *критериями подобия* *(kriterion (*греч.) – признак, средство для суждения). Обычно их обозначают начальными буквами имен ученых, внесших существенный вклад в данную область знания (например, Re – число, или критерий, Рейнольдса).

Явления, подобные между собой, характеризуются численно равными критериями подобия. Равенство критериев подобия – единственное количественное условие подобия процессов. Отсюда очевидно, что отношение критериев одной системы к критериям подобной ей системы всегда равно 1. Например, для натуры и модели $Re_1 = Re_2$. Тогда

$$\frac{w_1\rho_1 d_1/\mu_1}{w_2\rho_2 d_2/\mu_2} = 1 \qquad (6)$$

или

$$\frac{(w_1/w_2)(\rho_1/\rho_2)(d_1/d_2)}{\mu_1/\mu_2} = \frac{a_w a_\rho a_d}{a_\mu} = 1. \qquad (7)$$

Если отношение констант подобия равно 1, оно носит название *индикатора подобия* и указывает на равенство критериев подобия. Следовательно, *у подобных явлений индикаторы подобия равны единице* (первая теорема подобия). Критерии подобия, которые составлены только из величин, входящих в условия однозначности, называют *определяющими.* Критерии же включающие также величины, которые не являются необходимыми для однозначной характеристики данного процесса, а сами зависят от этих условий называют *определяемыми.*

Любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление (т.е. система дифференциальных уравнений), *может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия* (вторая теорема подобия):

$$f(K_1 K_2 K_3 \cdots) = 0 \qquad (8)$$

Эту зависимость называют *обобщенным (критериальным) уравнением,* а критерии подобия K_i – *обобщенными переменными величинами.*

Таким образом, теория подобия дает возможность представить решение дифференциальных уравнений и обрабатывать экспериментальные данные в виде обобщенных критериальных уравнений.

Обычно уравнение (8) записывают в виде зависимости определяемого критерия подобия (в который входит искомая величина) от определяющих:

$$K_1 = f(K_2 K_3 \cdots), \qquad (9)$$

например,

$$K_1 = A K_2^n K_2^m \cdots, \qquad (10)$$

где K_1 – определяемый критерий подобия; значения *A, n, m* находят опытным путем.

Подобны те явления, которые описываются одной и той же системой дифференциальных уравнений и у которых соблюдается подобие условий однозначности (третья теорема подобия). Подобию же условий однозначности при идентичности дифференциальных уравнений, описывающих процессы, отвечает равенство определяющих критериев подобия. Значит, третья теорема подобия может быть сформулирована и так: *явления подобны, если их определяющие критерии равны* [1].

Вопросы для самоконтроля:
1. Приведите определение моделирования.
2. Дайте характеристику видов подобия.
3. Охарактеризуйте инварианты подобия и критерии подобия.
4. Сформулируйте теоремы подобия.

Литература
1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.